Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
Ene-Mar 2024
3^{er} Examen Parcial (35 %)
Duración: 1 hora 50 minutos

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Pregunta 1. Resuelva los siguientes límites:

a) (4 ptos.) $\lim\limits_{x\to 1^-} (2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

b) (4 ptos.) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

Pregunta 2. Estudie la convergencia de:

a) (4 ptos.) $\displaystyle\int_e^{\infty} x^P \ln x \, \mathrm{d}x$

b) (3 ptos.) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

c) (3 ptos.) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\, 5^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

Pregunta 3. (6 ptos.) Halle el área de la región comprendida entre el círculo $x^2+y^2=8$, la parábola $y^2=2x$ e $y \geq 0$

Pregunta 4. (7 ptos.) Halle el volumen del sólido que se genera al hacer rotar la región limitada por

$$y=\frac{x^2}{4}, \quad y=x^2-3, \quad x=0 \quad \text{y} \quad x=2$$

alrededor de la recta $y=1$

Pregunta 5. (4 ptos.) Halle la longitud del arco de la curva $y=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\, \mathrm{d}t$ para $x \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$

SOLUCIONES

Pregunta 1. Resuelva los siguientes límites

a) (4 ptos.) $\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \to 1^{\infty}$ **IND!** Levantamos la indeterminación.

$$\lim_{x\to 1^-}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = e^{\ln\left(\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1^-}\ln\left((2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right)}$$

Digamos que $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln\left((2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right) = \mathrm{L}_1$, así

$$\mathrm{L}_1 = \lim_{x\to 1^-}\ln\left((2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right) = \lim_{x\to 1^-}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(2-x)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{(-1)/(2-x)}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2-x} = \frac{2}{\pi}$$

Por lo tanto, nos queda:

$$\lim_{x\to 1^-}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = e^{\mathrm{L}_1} = e^{2/\pi}$$

Finalmente, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = e^{2/\pi}}$

b) (4 ptos.) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} \to 0^0$ **IND!** Levantamos la indeterminación.

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e^{\ln\left(\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}\right)}$$

Digamos que $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}\right) = \mathrm{L}_3$, así,

$$\mathrm{L}_3 = \lim_{x\to 0}\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^x/(e^x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$$

Así, $L_3 = 1$, por lo tanto, concluimos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e}$$

Pregunta 2. Estudie la convergencia de:

a) (4 ptos.) $\displaystyle\int_e^{\infty} x^P \ln x \, \mathrm{d}x$

Resolvemos la integral impropia con integrando superior infinito. Veamos que ocurre en el siguiente límite:

$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_e^b x^P \ln x \, \mathrm{d}x$ Aplicamos integración por partes (Para $P \neq -1$)

$$f(x) = \ln(x) \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^P \quad \longrightarrow \quad g(x) = \frac{x^{P+1}}{P+1}$$

La integral nos queda:

$$\lim_{b\to\infty}\int_e^b x^P \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{P+1}\ln(x)}{P+1}\bigg|_e^b - \frac{1}{P+1}\int_e^b x^P \, \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{P+1}\lim_{b\to\infty}\left(x^{P+1}\ln(x) - \frac{x^{P+1}}{P+1}\bigg|_e^b\right) =$$
$$= \frac{1}{P+1}\lim_{b\to\infty}\left(b^{P+1}\ln(b) - \frac{b^{P+1}}{P+1} - e^{P+1}\ln(e) + \frac{e^{P+1}}{P+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{P+1}\left(\lim_{b\to\infty}\left(b^{P+1}\left(\ln(b) - \frac{1}{P+1}\right)\right) - Pe^{P+1}\right)$$

Veamos que ocurre para distintos casos de P:

- $P > -1$

  $$\frac{1}{P+1}\left(\lim_{b\to\infty}\left(b^{P+1}\left(\ln(b) - \frac{1}{P+1}\right)\right) - Pe^{P+1}\right) = \frac{1}{P+1}\left(\infty^{P+1}\left(\ln(\infty) - \frac{1}{P+1}\right) - Pe^{P+1}\right) =$$
  $$= \infty$$

  Es decir, la integral diverge para $P > -1$

- $P < -1$

  $$\frac{1}{P+1}\left(\lim_{b\to\infty}\left(b^{P+1}\left(\ln(b) - \frac{1}{P+1}\right)\right) - Pe^{P+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+P}\left(\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{-(1+P)}}\left(\ln(b)-\frac{1}{1+P}\right)\right)-\frac{P}{e^{-(1+P)}}\right)$$

De aquí,

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{-(1+P)}}\left(\ln(b)-\frac{1}{1+P}\right)\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln(b)}{b^{-(P+1)}} - \cancelto{0}{\frac{1}{(1+P)b^{-(P+1)}}}\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{\ln(b)}{b^{-(1+P)}} =$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{-(1+P)b^{-(1+P)-1}} = -\frac{1}{1+P}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{-(1+P)}} = 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{1+P}\left(\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{-(1+P)}}\left(\ln(b)-\frac{1}{1+P}\right)\right)-\frac{P}{e^{-(1+P)}}\right) = \frac{1}{1+P}\left(0-\frac{P}{e^{-(1+P)}}\right) = -\frac{P}{(1+P)e^{-(1+P)}}$$

Es decir, la integral converge para $P<-1$

- $P=-1$

  Debemos volver al primer límite,

$$\lim_{b\to\infty}\int_e^b x^P\ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_e^b x^{-1}\ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_e^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left((\ln b)^2-(\ln e)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\ln b)^2 - \frac{1}{2} = \infty$$

  Por lo tanto, la integral diverge para $P=-1$

$$\boxed{\text{Finalmente, } \int_e^\infty x^P\ln x\,\mathrm{d}x \begin{cases}\text{Diverge,} & \text{si } P\geq -1\\ \text{Converge,} & \text{si } P<-1\end{cases}}$$

b) (3 ptos.) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Observamos que la función posee una discontinuidad dentro del intervalo de integración, específicamente en $x=0$, por lo que tratamos con una integral impropia. Busquemos el límite de la integral cuando el integrando inferior tiende a 0:

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\begin{array}{cc} x = u^2 & \text{Si } x=a, u=\sqrt{a} \\ dx = 2u\,\mathrm{d}u & \text{Si } x=1, u=1 \end{array}$$

Nos queda entonces:

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_{\sqrt{a}}^1 \frac{u^2-1}{u}2u\,\mathrm{d}u = 2\lim_{a\to 0}\int_{\sqrt{a}}^1 (u^2-1)\,\mathrm{d}u = 2\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{3}u^3-u\right)\Big|_{\sqrt{a}}^1 =$$

$$= 2\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{3}(\sqrt{a})^3 + \sqrt{a}\right) = 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\boxed{\text{Finalmente, } \int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$$

c) (3 ptos.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,5^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Observamos que la integral es impropia debido a que posee un integrando al infinito. Veamos el límite cuando el integrando inferior tiende a $-\infty$

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,5^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_a^0 (-2x)\,5^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\begin{array}{cc} u = -x^2 & \text{Si } x = a, u = -a^2 \\ \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x & \text{Si } x = 0, u = 0 \end{array}$$

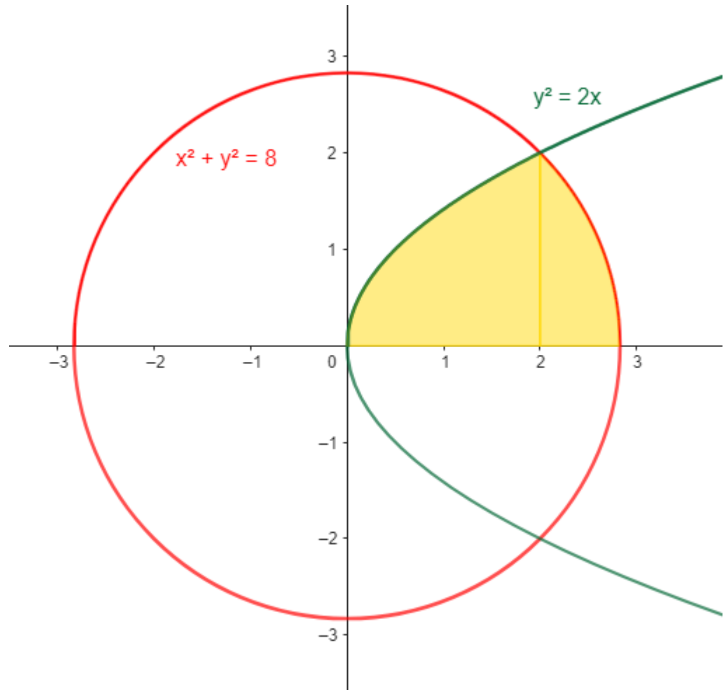
Nos queda entonces:

$$\lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_a^0 (-2x)\,5^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_{-a^2}^0 5^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2\ln(5)}\lim_{a\to-\infty} 5^u\Big|_{-a^2}^{0} =$$
$$= -\frac{1}{2\ln(5)}\lim_{a\to-\infty}(5^0 - 5^{-a^2}) = -\frac{1}{2\ln(5)}\lim_{a\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{5^{a^2}}\right) = -\frac{1}{2\ln(5)}$$

$$\boxed{\text{Finalmente, } \int_{-\infty}^0 x\,5^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$$

Pregunta 3. (6 ptos.) Halle el área de la región comprendida entre el círculo $x^2 + y^2 = 8$, la parábola $y^2 = 2x$ e $y \geq 0$

El área que buscamos es la región marcada en color amarillo en la siguiente figura, la cuál viene dada por la integral de la parábola desde x=0 hasta el punto de intersección de la parábola con la circunferencia en el primer cuadrante, sumado a la integral desde dicho punto de intersección, hasta el punto donde la circunferencia corta al eje x positivo.



Intersección de la parábola con la circunferencia:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x = 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

$x = -4$ no satisface para la circunferencia

Despejamos en ambas ecuaciones y en función de x

$$y^2 = 2x$$

$$y = \pm\sqrt{2x}$$

$y = \sqrt{2x}$ $*y$ se encuentra en el primer cuadrante

$$x^2 + y^2 = 8$$

$$y^2 = 8 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{8 - x^2}$$

$y = \sqrt{8 - x^2}$ $*y$ se encuentra en el primer cuadrante

Luego, el área A viene dada por:

$$\mathrm{A} = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{I}_1} + \underbrace{\int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{I}_2}$$

Para I_1, hacemos un cambio de variable:

$$\begin{array}{cc} u^2 = x & \text{Si } x=0, u=0 \\ 2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \text{Si } x=2, u=\sqrt{2} \end{array}$$

Nos queda entonces:

$$\int_0^2 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} u^2\,\mathrm{d}u = \frac{2\sqrt{2}}{3}u^3\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{3}$$

Para I_2, hacemos un cambio trigonométrico:

$$\begin{array}{cc} x = \sqrt{8}\,\mathrm{sen}\,\Theta & \text{Si } x=2, \Theta = \pi/4 \\ \mathrm{d}x = \sqrt{8}\cos\Theta\,\mathrm{d}\Theta & \text{Si } x=\sqrt{8}, \Theta = \pi/2 \end{array}$$

Nos queda entonces:

$$\int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{8-(\sqrt{8}\,\mathrm{sen}\,\Theta)^2}\sqrt{8}\cos\Theta\,\mathrm{d}\Theta = \sqrt{8}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{8(1-\mathrm{sen}^2\,\Theta)}\cos\Theta\,\mathrm{d}\Theta =$$

$$= 8\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\Theta\,\mathrm{d}\Theta = 8\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\Theta)}{2}\,\mathrm{d}\Theta = 4\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\Theta + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos(2\Theta)\,\mathrm{d}\Theta =$$

$$= 4\Theta\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + 2\,\mathrm{sen}(2\Theta)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 4\cdot\frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 4\cdot\frac{\pi}{4} - 2\,\mathrm{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \pi - 2$$

Así, $\mathrm{A}{=}I_1 + I_2 = \frac{8}{3} + \pi - 2 = \frac{2}{3} + \pi$

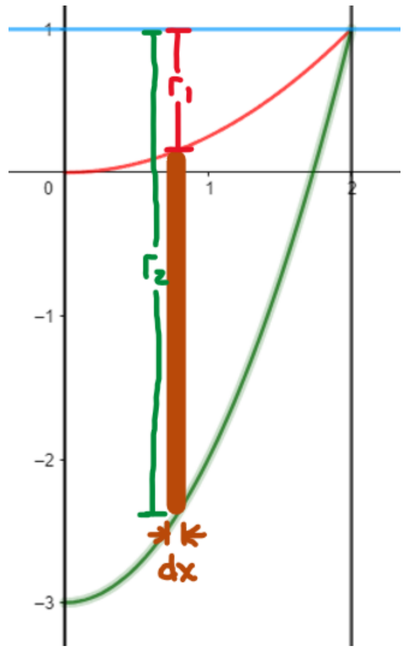
Finalmente, $\boxed{\text{el área A viene dada por A}= \frac{2}{3} + \pi}$

Pregunta 4. (7 ptos.) Halle el volumen del sólido que se genera al hacer rotar la región limitada por

$$y = \frac{x^2}{4}, \quad y = x^2 - 3, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 2$$

alrededor de la recta $y = 1$

De manera gráfica tenemos lo siguiente:



Tenemos una región encerrada entre las funciones dadas, misma que vamos a girar alrededor de la recta y=1. Las funciones se interceptan en el punto $(2, 1)$. Si separamos dicha región en secciones transversales, podemos obtener el volumen de cada una al girarla alrededor de y=1, usando en este caso, el método de arandelas (Ya que la sección transversal es perpendicular al eje de rotación). Por lo tanto,

$$\text{V}= \pi \int_0^2 \left((r_2)^2 - (r_1)^2\right) \mathrm{d}x$$

$$r_1 = 1 - \frac{x^2}{4}$$
$$r_2 = 1 - (x^2 - 3) = 4 - x^2$$

$$\text{V}= \pi \int_0^2 \left(\left(4 - x^2\right)^2 - \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2\right) \mathrm{d}x = \pi \int_0^2 \left(16 - 8x^2 + x^4 - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{16}x^4\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_0^2 \left(15 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{16}x^4\right) \mathrm{d}x = 15\pi \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4\right) \mathrm{d}x = 15\pi\left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{2^4 \cdot 5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 15\pi\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \pi(30 - 20 + 6) = 16\pi$$

Finalmente, $\boxed{\text{el volumen del sólido viene dado por V= } 16\pi}$

Pregunta 5. (4 ptos.) Halle la longitud del arco de la curva $y = \int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\, \mathrm{d}t$ para $x \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$

Es sabido que la longitud de una curva de una función $f(x)$ desde un punto a hasta un punto b viene dada por $\mathrm{L} = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

En nuestro caso,

$$f(x) = y = \int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow f'(x) = y' = \sqrt{\cos x}$$

$$\mathrm{L} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Por la identidad trigonométrica fundamental, podemos decir que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x &= 1-\cos^2 x \\ \operatorname{sen}^2 x &= (1-\cos x)(1+\cos x) \\ \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} &= 1+\cos x \end{aligned}$$

Así,

$$\mathrm{L} = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos un cambio de variable:

$$\begin{array}{cc} 1-\cos x = u^2 & \text{Si } x = 0, u = 0 \\ \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u & \text{Si } x = \pi/2, u = 1 \end{array}$$

Nos queda entonces:

$$\mathrm{L} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{2u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2}} = 4\int_0^1 \mathrm{d}u = 4u\Big|_0^1 = 4$$

Finalmente, $\boxed{\text{la longitud L viene dada por L} = 4}$

Este parcial fue digitalizado en LaTeX por **Daniel Quijada** para **GECOUSB**

Daniel Quijada
20-10518
Lic. en Matemáticas

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **20-10518@usb.ve**